

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**  
**ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011**  
**Filiera tehnologica : profil tehnic**

**XI. OSZTÁLY**

1. Legyen  $f : R^* \rightarrow M_3(R)$ ,  $f(x) = x \cdot A$ , ahol  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Számítsuk ki:  $f^2(x)$  és  $f^3(x)$  .

b) Határozzuk meg:  $f^{2011}(1)$  .

c) Határozzuk meg az  $x \in R^*$  értékét úgy, hogy:  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot f(x) \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix} = (2011)$ , ahol  $(2011)$

egy, egy soros és egy oszlopos mátrix.

2. Egy űrhajó pályáját az  $y = f(t) = \sqrt{\frac{t^2 - 4}{4}}$  képlet írja le, ahol  $t$  jelenti a másodpercekben

kifejezett időt,  $f(t)$  pedig a kilométerben kifejezett magasságot (a  $t=0$  időponttól a  $t=2$  időpontig tart a kifutópálya elhagyása, tehát a magasságot 0-nak tekintjük).

a) Határozd meg, hogy milyen magasságra emelkedik az űrhajó a kifutópálya elhagyása után 4 másodperccel!

b) Igazold, hogy az űrhajó pályája konkáv!

c) Határozd meg a pálya aszimptotáját (ha az idő tart a végtelenhez)!

3. Legyen  $M$  azon harmadrendű mátrixok halmaza, amelyek elemei csak az 1, 3, 5, ..., 17 számok lehetnek (mindegyik páratlan szám csak egyszer szerepelhet egy  $M$  halmazbeli mátrixban).

a) Adj példát két különböző  $M$  halmazbeli mátrixra, amelyek determinánsai egyenlők!

b) Ellenőrizd, hogy van-e olyan  $A$  mátrix az  $M$  halmazban, amelyre  $\det A = \det I_3$  .

c) Határozd meg azon  $M$  halmazbeli mátrixok számát, amelyekben az első sorban az 1, 3 és 5 számok szerepelnek (nem feltétlenül ebben a sorrendben).

4. Legyen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$  . Igazoljuk, hogy:

a)  $f(\ln 2) > 0$  (alkalmazva esetleg a  $\ln 2 \approx 0,7$  megközelítést).

b)  $f(x) < 0$ ,  $\forall x < 0$  .

c)  $\sqrt{e} > 1,625$  .

**Megjegyzés:** Munkaidő 3 óra; Minden feladat kötelező; Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak.

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**  
**ETAPA NAȚIONALĂ - 18 aprilie 2011**  
**Filiera tehnologică : profil tehnic**

**XII. OSZTÁLY**

1. Legyen  $M$  az összes 4-elemű csoportok halmaza.
  - a) Adjunk példát egy csoportra az  $M$  halmazból.
  - b) Igazoljuk, hogy létezik egy  $G \subset M$  csoport úgy, hogy  $G \cap \mathbb{C} \neq \emptyset$ .
  - c) Igazoljuk, hogy az  $M$  halmazban létezik legalább két, egymással nem izomorf csoport.
  
2. Adott az  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$  függvény.
  - a) Igazoljuk, hogy  $f(x) > 0, \forall x \in (0, \infty)$ .
  - b) Számítsuk ki  $\int_0^1 f(x) dx$ .
  - c) Bizonyítsuk be, hogy  $\ln 2 > 0,66$ .
  
3. Legyen  $f, g : \mathbb{Z}_{13} \rightarrow \mathbb{Z}_{13}, f(x) = x \cdot x, g(x) = x + x, \forall x \in \mathbb{Z}_{13}$ .
  - a) Határozzunk meg két,  $a$  és  $b$  különböző elemet a  $\mathbb{Z}_{13}$  - halmazból úgy, hogy  $f(a) = f(b)$  és  $g(a) \neq g(b)$ .
  - b) Igazoljuk, hogy az  $f$  függvény nem szürjektív illetve a  $g$  függvény bijektív.
  
4. Adott a  $P = \{f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \mid f \text{ folytonos a } [0, 1] \text{ intervallumon, } f(0) = 0, f(1) = 1\}$  halmaz.
  - a) Igazoljuk, hogy a  $P$  halmazban van legalább 2011 függvény.
  - b) Határozzunk meg egy  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$  tulajdonsággal rendelkező  $f \in P$  függvényt.
  - c) Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan  $f$  függvény létezik a  $P$  halmazban amelyre  $\int_0^1 f(x) dx < \frac{1}{2011}$ .

**Megjegyzés:** Munkaidő 3 óra; Minden feladat kötelező; Minden feladatot 0-tól 7-ig pontoznak.